

# Bicentenaire des équations de Navier-Stokes

Année de la Mécanique 2021-2022

## Quelques mots

- Auteur : Claude Louis Marie Henri Navier
- Mémoire à l'académie royale des sciences
- Intitulé : sur les lois du mouvement d'un fluide
- Ce mémoire a été lu dans la séance du 18 mars 1822.
- Il a été publié dans les mémoires de l'académie de 1823.
- On trouvera à partir des pages suivantes quelques extraits de ce mémoire et la page où les équations sont écrites
- Équations simples avec les notations modernes

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u \right) = -\nabla p + f + \mu \Delta u$$

- Ecriture avec la condition d'incompressibilité :

$$\begin{cases} \nabla \cdot u = 0 \\ \rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u \right) = -\nabla p + f + \mu \Delta u \end{cases}$$

# MÉMOIRES

DE

L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES

DE L'INSTITUT

DE FRANCE.

---

ANNÉE 1823.

---

TOME VI.



PARIS,

CHEZ FIRMIN DIDOT, PÈRE ET FILS, LIBRAIRES,

REX JACOB, N° 24.

---

1827.

# TABLE

DES MÉMOIRES CONTENUS DANS CE VOLUME,

*Qui est le sixième de la collection des Mémoires de l'Académie  
des Sciences, depuis l'ordonnance du 21 mars 1816.*

	Page
RECHERCHES SUR quelques objets d'analyse indéterminée et particulièrement sur le théorème de Fermat, par M. LEGENDRE....	1
MÉMOIRE SUR le développement de l'anomalie vraie et du rayon vecteur elliptique, en séries ordonnées suivant les puissances de l'excentricité, par M. DE LAPLACE.....	61
MÉMOIRE SUR l'état de la végétation au sommet du Pic du Midi de Bigarrés, par M. L. RAMOND.....	81
MÉMOIRE SUR la théorie mathématique des phénomènes électrodynamiques, uniquement déduite de l'expérience, dans lequel se trouvent réunis les Mémoires que M. Ampère a communiqués à l'Académie royale des sciences, dans les séances des 4 et 26 décembre 1820, 10 juin 1822, 22 décembre 1823, 12 septembre et 23 novembre 1825.....	175
MÉMOIRE SUR les lois du mouvement des fluides, par M. NAVIER.....	389
MÉMOIRE SUR la théorie du magnétisme en mouvement, par M. POISSON.....	441
MÉMOIRE SUR le calcul numérique des intégrales définies, par M. POISSON.....	571
MÉMOIRE SUR les développements des fonctions en séries périodiques, par M. AUGUSTIN CAUCHY.....	603

---

# MÉMOIRE

SUR LES LOIS DU MOUVEMENT DES FLUIDES;

PAR M. NAVIER.

Lu à l'Académie royale des Sciences, le 18 mars 1822.

---

## I. *Notions préliminaires.*

LES géomètres représentent, au moyen d'équations aux différences partielles, les conditions générales de l'équilibre et du mouvement des fluides. Ces équations ont été déduites de divers principes, qui supposent tous que les molécules du fluide sont susceptibles de prendre les unes par rapport aux autres des mouvements quelconques, sans opposer aucune résistance, et de glisser sans effort sur les parois des vases dans lesquels le fluide est contenu. Mais les différences considérables, ou totales, que présentent dans certains cas les effets naturels avec les résultats des théories connues, indiquent la nécessité de recourir à des notions nouvelles, et d'avoir égard à certaines actions moléculaires qui se manifestent principalement dans les phénomènes du mouvement. On sait, par exemple, que, dans le cas où l'eau s'écoule hors d'un vase par un long tuyau d'un petit diamètre, le cal-

$$\begin{aligned}
& + \iiint dx dy dz \left[ \left( \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 v}{dy^2} + \frac{d^2 w}{dz^2} \right) \delta u + \left( \frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{d^2 w}{dy^2} + \frac{d^2 u}{dz^2} \right) \delta v + \left( \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{d^2 v}{dz^2} \right) \delta w \right] \\
& + \iint dy dz \left[ 2 \frac{d^2 u}{dx^2} \delta u' + \left( \frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{d^2 v}{dz^2} \right) \delta v' + \left( \frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{d^2 w}{dy^2} \right) \delta w' \right] \\
& + \iint dx dz \left[ \left( \frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{d^2 v}{dx^2} \right) \delta u' + 2 \frac{d^2 v}{dy^2} \delta v' + \left( \frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{d^2 w}{dy^2} \right) \delta w' \right] \\
& + \iint dx dy \left[ \left( \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 w}{dy^2} \right) \delta u' + \left( \frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{d^2 w}{dy^2} \right) \delta v' + 2 \frac{d^2 w}{dy^2} \delta w' \right] \\
& - \iint dy dz \left[ \left( 2 \frac{d^2 u}{dx^2} \delta u' + \text{etc.} \right. \right.
\end{aligned}$$

On voit donc en premier lieu que les équations indéfinies du mouvement du fluide deviendront respectivement

$$P - \frac{dp}{dx} = \left( \frac{du}{dt} + u \frac{du}{dx} + v \frac{du}{dy} + w \frac{du}{dz} \right) - \left( \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 v}{dy^2} + \frac{d^2 w}{dz^2} \right),$$

$$Q - \frac{dp}{dy} = \left( \frac{dv}{dt} + u \frac{dv}{dx} + v \frac{dv}{dy} + w \frac{dv}{dz} \right) - \left( \frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{d^2 v}{dy^2} + \frac{d^2 v}{dz^2} \right),$$

$$R - \frac{dp}{dz} = \left( \frac{dw}{dt} + u \frac{dw}{dx} + v \frac{dw}{dy} + w \frac{dw}{dz} \right) - \left( \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{d^2 w}{dy^2} + \frac{d^2 w}{dz^2} \right).$$

En second lieu, à l'égard des conditions qui se rapportent aux points de la surface du fluide, si l'on désigne, comme on l'a fait plus haut, par  $l, m, n$  les angles que le plan tangent à la surface forme avec les plans des  $yz$ , des  $xz$  et des  $xy$ ; si l'on remplace  $dy dz$  par  $d^2 s \cos l$ ,  $dx dz$  par  $d^2 s \cos m$ ,  $dx dy$  par  $d^2 s \cos n$ , et les doubles signes d'intégration relatifs à  $dy dz$ ,  $dx dz$ ,  $dy dz$  par le signe S relatif à  $ds$ : il sera nécessaire, pour que les termes affectés des quantités  $\delta u$ ,  $\delta v$ ,  $\delta w$  soient respectivement réduits à zéro, que l'on ait, pour chacun des points de la surface du fluide, les équations déterminées