Bicentenaire des équations de Navier-Stokes

Année de la Mécanique 2021-2022

Quelques mots

- Auteur : Claude Louis Marie Henri Navier
- Mémoire à l'académie royale des sciences
- Intitulé : sur les lois du mouvement d'un fluide
- Ce mémoire a été lu dans la séance du 18 mars 1822.
- Il a été publié dans les mémoires de l'académie de 1823.
- On trouvera à partir des pages suivantes quelques extraits de ce mémoire et la page où les équations sont écrites
- Équations simples avec les notations modernes

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u.\nabla u\right) = -\nabla p + f + \mu\Delta u$$

- Ecriture avec la condition d'incompressibilité :

$$\left\{\begin{array}{l} \nabla.u = 0 \\ \rho\left(\dfrac{\partial u}{\partial t} + u.\nabla u\right) = -\nabla p + f + \mu\Delta u \end{array}\right.$$

MÉMOIRES

DE

L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES DE L'INSTITUT DE FRANCE.

ANNÉE 1823.

TOME VI.

PARIS,

CHEZ FIRMIN DIDOT, PÈRE ET FILS, LIBRAIRES,

RUE JACOB, N° 24.

1827.

TABLE

DES MÉMOIRES CONTENUS DANS CE VOLUME,

Qui est le sixième de la collection des Mémoires de l'Académie des Sciences, depuis l'ordonnance du 21 *mars* 1816.

MÉMOIRE

SUR LES LOIS DU MOUVEMENT DES FLUIDES;

PAR M. NAVIER.

Lu à l'Académie royale des Sciences, le 18 mars 1822.

I. *Notions préliminaires.*

LES géomètres représentent, au moyen d'équations aux différences partielles, les conditions générales de l'équilibre et du mouvement des fluides. Ces équations ont été déduites de divers principes, qui supposent tous que les molécules du fluide sont susceptibles de prendre les unes par rapport aux autres des mouvements quelconques, sans opposer aucune résistance, et de glisser sans effort sur les parois des vases dans lesquels le fluide est contenu. Mais les différences considérables, ou totales, que présentent dans certains cas les effets naturels avec les résultats des théories connues, indiquent la nécessité de recourir à des notions nouvelles, et d'avoir égard à certaines actions moléculaires qui se manifestent principalement dans les phénomènes du mouvement. On sait, par exemple, que, dans le cas où l'eau s'écoule hors d'un vase par un long tuyau d'un petit diamètre, le cal-

$$\varepsilon\iiint dx\,dy\,dz\left[\left(\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}+\frac{d^2u}{dz^2}\right)\delta u+\left(\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{d^2v}{dy^2}+\frac{d^2v}{dz^2}\right)\delta v+\left(\frac{d^2w}{dx^2}+\frac{d^2w}{dy^2}+\frac{d^2w}{dz^2}\right)\delta w\right]$$
$$+\varepsilon\iint dy'\,dz'\quad\left[2\frac{du'}{dx'}\delta u'+\left(\frac{du'}{dy'}+\frac{dv'}{dx'}\right)\delta v'+\left(\frac{du'}{dz'}+\frac{dw'}{dx'}\right)\delta w'\right]$$
$$+\varepsilon\iint dx'\,dz'\quad\left[\left(\frac{du'}{dy'}+\frac{dv'}{dx'}\right)\delta u'+2\frac{dv'}{dy'}\delta v'+\left(\frac{dv'}{dz'}+\frac{dw'}{dy'}\right)\delta w'\right]$$
$$+\varepsilon\iint dx'\,dy'\quad\left[\left(\frac{du'}{dz'}+\frac{dw'}{dx'}\right)\delta u'+\left(\frac{dv'}{dz'}+\frac{dw'}{dy'}\right)\delta v'+2\frac{dw'}{dz'}\delta w'\right]$$
$$-\varepsilon\iint dy''\,dz''\quad\left[\left(2\frac{du''}{dx''}\delta u''+\text{etc.}\right.\right.$$

On voit donc en premier lieu que les équations indéfinies du mouvement du fluide deviendront respectivement

$$P-\frac{dp}{dx}=\rho\left(\frac{du}{dt}+u\frac{du}{dx}+v\frac{du}{dy}+w\frac{du}{dz}\right)-\varepsilon\left(\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}+\frac{d^2u}{dz^2}\right),$$
$$Q-\frac{dp}{dy}=\rho\left(\frac{dv}{dt}+u\frac{dv}{dx}+v\frac{dv}{dy}+w\frac{dv}{dz}\right)-\varepsilon\left(\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{d^2v}{dy^2}+\frac{d^2v}{dz^2}\right),$$
$$R-\frac{dp}{dz}=\rho\left(\frac{dw}{dt}+u\frac{dw}{dx}+v\frac{dw}{dy}+w\frac{dw}{dz}\right)-\varepsilon\left(\frac{d^2w}{dx^2}+\frac{d^2w}{dy^2}+\frac{d^2w}{dz^2}\right).$$

En second lieu, à l'égard des conditions qui se rapportent aux points de la surface du fluide, si l'on désigne, comme on l'a fait plus haut, par l, m, n les angles que le plan tangent à la surface forme avec les plans des yz, des xz et des xy; si l'on remplace $dydz$ par $ds^2\cos. l$, $dxdz$ par $ds^2\cos. m$, $dxdy$ par $ds^2\cos. n$, et les doubles signes d'intégration relatifs à $dydz$, $dxdz$, $dydz$ par le signe S relatif à ds^2: il sera nécessaire, pour que les termes affectés des quantités δu, δv, δw soient respectivement réduits à zéro, que l'on ait, pour chacun des points de la surface du fluide, les équations déterminées